ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ -ΔΥΟ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ-ΔΥΟ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ενα διάστημα Δ.

α. Να αποδείξετε ότι αν f '(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ. Μον. 8

β. Αν f '(x)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τι συμπεραίνετε για την μονοτονία της συνάρτησης f; Μον. 5

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστό ή Λάθος

α.Η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Μον. 3

β. Η συνάρτηση f με $f'(x)=-2\eta\mu x+\frac{1}{\eta\mu^2 x}+3$,όπου x $\in$ $[\frac{\pi}{2},\pi]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Μον. 3

γ Αν f '(x)=g'(x)+3 για κάθε x $\in$ Δ,τότε η συνάρτηση h(x)=f(x)-g(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 (e^x+x)\,dx$ Μον. 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ Μον. 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)\,dx$ Μον. 2

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c, c $\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x)+c, c $\in\mathbb{R}$ Μον. 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστο ή Λάθος

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$ Μον. 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α , β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν f '(x)>0 στο (α, x_0) και f '(x)<0 στο (β, x_0) , τοτε το f(x_0) είναι τοπικό ελάχιστο της f. Μον. 2

γ. Μια συνάρτηση $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ είναι “ 1-1” , αν και μονο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή , αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ Μον. 2

δ. Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει :

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$ Μον. 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α ,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α ,β]. Μον. 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\alpha x-1$, *όπου* $\alpha>1$

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,f(0)) Μον. 4

β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιαζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό Μον. 8

γ. Έστω Ε(α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο (0,f(0)) και την ευθεία x=α>1.

ι. Να αποδείξετε ότι $E(\alpha)=e^{\alpha}-\dfrac{\alpha^2}{2}-\alpha-1$ Μον. 7

ιι Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)$ Μον. 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=e^x+(x-1)i$, $x\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι Re(z)>Im(z) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Μον. 8

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός Μον. 8

γ. Να βρείτε τον μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο Μον. 9